JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 17, 199-213 (1967)

Une Nouvelle Méthode de Directions Alternées à q Variables*

JACK GUITTET

Directeur d'Études Adjoint à la SEMA (METRA-International), 35 boulevard Brune, Paris 14e, France

Submitted by Robert Lattes

A.D.I. methods were first introduced by Peaceman, Douglas and Rachford to solve the two-dimensional Poisson equation. Later Douglas and Rachford devised another method for solving the three-dimensional equation. These methods allow generalizations in more variable space. Here we give a q-variable method which is more rapidly convergent and of easier application on a digital computer. It is the same as Peaceman's when $q = 2$. If $q = 3$ it is equivalent to that of Douglas in the case where the ratio of the smallest and greatest eigenvalue of the matrices involved is very small. Our method is quite different from Douglas's one when $q = 4$.

1. INTRODUCTION

Les méthodes de directions alternées de Peaceman, Douglas et Rachford ont été imaginées pour résoudre l'équation de Poisson à deux variables. Douglas et Rachford [4], et Douglas [6], imaginèrent des méthodes de directions alternées résolvant l'équation de Poisson à 3 variables dans un domaine parallélipipédique. Les deux méthodes se généralisent immédiatement s'il y a plus de 3 variables.

Le principal objet de cette note est d'indiquer une méthode plus rapidement convergente et d'exécution plus aisée sur calculateur électronique.

2. LES MÉTHODES DE DOUGLAS-RACHFORD ET DE DOUGLAS

Considérons le système d'équations linéaires

$$Au = b \tag{1}$$

* Work supported by a contract from the French DGRST.

409/17/2-1

où A est un opérateur de la forme

$$A = \sum_{i=1}^{q} A_i \tag{2}$$

les opérateurs A_i étant définis positifs, et commutables deux à deux. La méthode de directions alternées de Douglas–Rachford permettant de résoudre ce système, s'écrit:

$$\begin{aligned} (1 + rA_1)\, u_{n+(1/q)} &= [1 + r(A_1 - A)]\, u_n + rb \\ (1 + rA_i)\, u_{n+(i/q)} &= rA_i u_n + u_{n+(i-1)/q} \qquad i = 2, 3,\ldots, q \\ &u_0 \text{ choisi quelconque.} \end{aligned} \tag{3}$$

Dans le cas particulier où il n'y a que 3 variables ($q = 3$), l'élimination des vecteurs intermédiaires $u_{n+\frac{1}{3}}$ et $u_{n+\frac{2}{3}}$ donne

$$\begin{aligned} &(1 + rA_1)(1 + rA_2)(1 + rA_3)u_{n+1} \\ &\quad = [1 + r^2(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1) + r^3A_1A_2A_3]u_n + rb \end{aligned} \tag{4}$$

ce qui s'écrit encore

$$u_{n+1} = T_{\mathrm{DR}} u_n + f_{\mathrm{DR}}$$

où

$$f_{\mathrm{DR}} = r(1 + rA_1)^{-1}(1 + rA_2)^{-1}(1 + rA_3)^{-1}b$$

et où

$$T_{\mathrm{DR}} = 1 - rA(1 + rA_1)^{-1}(1 + rA_2)^{-1}(1 + rA_3)^{-1} \tag{5}$$

est la matrice de réduction de Douglas–Rachford. La méthode de directions alternées de Douglas permettant de résoudre le système (1) s'écrit:

$$\begin{aligned} (1 + rA_1)\, u_{n+(1/q)} &= [1 + r(A_1 - 2A)]\, u_n + 2rb \\ (1 + rA_i)\, u_{n+(i/q)} &= rA_i u_n + u_{n+(i-1)/q} \qquad i = 2, 3,\ldots, q \\ &u_0 \text{ choisi quelconque.} \end{aligned} \tag{6}$$

Dans le cas particulier où il n'y a que 3 variables ($q = 3$), on obtient

$$\begin{aligned} &(1 + rA_1)(1 + rA_2)(1 + rA_3)u_{n+1} \\ &\quad = [1 - rA + r^2(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1) + r^3A_1A_2A_3]u_n + 2rb \end{aligned} \tag{7}$$

ce qui s'écrit encore

$$u_{n+1} = T_{\mathrm{D}} u_n + f_{\mathrm{D}}$$

où

$$f_D = 2r(1 + rA_1)^{-1}(1 + rA_2)^{-1}(1 + rA_3)^{-1}b$$

et où

$$T_D = 1 - 2rA(1 + rA_1)^{-1}(1 + rA_2)^{-1}(1 + rA_3)^{-1} \tag{8}$$

est la matrice de réduction de Douglas. La rapidité de convergence des deux procédés dépend de la petitesse des rayons spectraux des matrices T_{DR} et T_D, et par conséquent du choix du paramètre r. En fait, on voit que les matrices T_{DR} et T_D sont des expressions particulières de la matrice

$$T = 1 - mrA(1 + rA_1)^{-1}(1 + rA_2)^{-1}(1 + rA_3)^{-1} \tag{9}$$

dans laquelle on a pris successivement 1 et 2 comme valeurs de m.

3. Une Nouvelle Méthode de Directions Alternées

A. *Présentation de la Méthode*

Les deux procédés (3) et (6) à 3 variables sont alors équivalents, du point de vue vitesse de convergence, au procédé suivant:

$$\begin{aligned}
&(1 + rA_1)\, u_{n+\frac{1}{3}} = [(1 + rA_1)(1 + rA_2)(1 + rA_3) - mrA]\, u_n + mrb \\
&(1 + rA_2)\, u_{n+\frac{2}{3}} = u_{n+\frac{1}{3}} \\
&(1 + rA_3)\, u_{n+1} = u_{n+\frac{2}{3}} \\
&\qquad u_0 \text{ choisi quelconque}
\end{aligned} \tag{10}$$

dans lequel on a pris successivement pour m les valeurs 1 et 2.

La matrice de réduction du procédé (10) est la matrice (9). Ce procédé se généralise immédiatement sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
&(1 + rA_1)\, u_{n+(1/q)} = \left[\prod_{i=1}^{q} (1 + rA_i) - mrA\right] u_n + mrb \\
&(1 + rA_i)\, u_{n+(i/q)} = u_{n+(i-1)/q} \qquad i = 2, 3, \ldots, q \\
&\qquad u_0 \text{ choisi quelconque}
\end{aligned} \tag{11}$$

dont la matrice de réduction s'écrit

$$T = 1 - mrA \prod_{i=1}^{q} (1 + rA_i). \tag{12}$$

La matrice de réduction obtenue généralise les matrices (9). De plus, le procédé de directions alternées (11) nécessite le stockage d'un vecteur de moins que les méthodes (3) et (6).

Nous allons maintenant déterminer les valeurs à donner aux paramètres m et r, supposés positifs, pour que le procédé (11) converge le plus rapidement possible, c'est-à-dire encore pour que le rayon spectral $\rho(T)$ de la matrice T soit minimum.

Nous supposerons pour cela que l'on connaît des bornes communes aux spectres des matrices A_i soit

$$\alpha \leqslant \lambda(A_i) \leqslant \beta \qquad i \in I = \{1, 2, \ldots, q\} \tag{13}$$

où $\lambda(A_i)$ est une valeur propre de A_i et I l'ensemble des valeurs possibles de i.

B. *Recherche d'une Borne Supérieure de $\rho(T)$*

Les matrices A_i, commutables deux à deux, ont même système de vecteurs propres.

Les valeurs propres de T sont alors de la forme

$$\lambda_j(T) = 1 - mr \frac{\sum_{i \in I} \lambda_j(A_i)}{\prod_{i \in I}[1 + r\lambda_j(A_i)]}$$

où $\lambda_j(A_i)$ désigne la valeur propre de A_i correspondant à un vecteur propre V_j.

Si l'on pose

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_q] = \frac{r \sum_{i \in I} x_i}{\prod_{i \in I}(1 + rx_i)}$$

on aura, compte tenu de (13):

$$\inf_{\substack{x_i \in [\alpha, \beta] \\ i \in I}} (1 - mf) \leqslant \lambda_j(T) \leqslant \sup_{\substack{x_i \in [\alpha, \beta] \\ i \in I}} (1 - mf)$$

soit encore

$$\rho(T) \leqslant \sup_{\substack{x_i \in [\alpha, \beta] \\ i \in I}} | 1 - mf | \tag{14}$$

C. *Étude de la Fonction f*

LEMME 1. *Les extrema de la fonction f se produisent pour des valeurs de x_i prises aux bornes de l'intervalle* $[\alpha, \beta]$. *En effet, la dérivée partielle*

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1 - r \sum_{j \in I, j \neq i} x_j}{(1 + rx_i) \sum_{i \in I} x_i}$$

garde un signe constant quel que soit $x_i \in [\alpha, \beta]$.

Si les x_j sont donnés, pour $j \neq i$, la fonction f est donc une fonction monotone de x_i, et les extrema de f ont lieu pour $x_i = \alpha$ et $x_i = \beta$.

On aura donc, en introduisant la fonction positive

$$g(p) = \frac{p\alpha r + (q-p)\beta r}{(1+\alpha r)^p (1+\beta r)^{q-p}} \qquad p \in Q = \{0, 1,..., q\}$$

les relations

$$\sup_{\substack{x_i \in [\alpha,\beta] \\ i \in I}} f = \sup_{\substack{x_i \in \{\alpha,\beta\} \\ i \in I}} f = \sup_{p \in Q} g(p) = G$$

$$\inf_{\substack{x_i \in [\alpha,\beta] \\ i \in I}} f = \inf_{\substack{x_i \in \{\alpha,\beta\} \\ i \in I}} f = \inf_{p \in Q} g(p) = g. \tag{15}$$

L'étude des extrema de f revient à l'étude des extrema de g.

D. *Étude de la Fonction g*

LEMME 2. *Si $r \in]r_p, r_{p+1}[$, où*

$$r_p = \frac{1}{(p-1)\alpha + (q-p)\beta} \qquad p \in I = \{1, 2,..., q\}$$

$$r_0 = 0$$

$$r_{q+1} = \infty$$

$g(s)$ est une fonction croissante de s pour $s < p$, et décroissante pour $s \geqslant p$, $g(p)$ étant la valeur maximum atteinte. De plus, si $r = r_p$, $g(s)$ est une fonction croissante de s pour $s < p-1$, puis décroissante pour $s \geqslant p$, $g(p-1) = g(p)$ étant la valeur maximum atteinte.

En effet, d'une part r_p est une fonction croissante de p; d'autre part l'inégalité

$$g(p) > g(p+1)$$

s'écrit

$$\frac{1+\alpha r}{1+\beta r} > \frac{(p+1)\alpha + (q-p-1)\beta}{p\alpha + (q-p)\beta}$$

soit encore

$$r < r_{p+1}$$

et par conséquent le système d'inégalités

$$r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_p < r < r_{p+1} < \cdots < r_q < r_{q+1} \qquad p \in Q$$

est équivalent au système

$$g(p) > g(p+1) > \cdots > g(q)$$

$$g(p) > g(p-1) > \cdots > g(0)$$

De plus, l'égalité $r = r_p$ entraîne l'égalité $g(p) = g(p-1)$.

Lemme 3. *$g(q)$ est inférieur ou égal à $g(0)$ si $r \leqslant r^*$, et réciproquement, avec*

$$r^* = \frac{\beta^{1/q} - \alpha^{1/q}}{\alpha^{1/q}\beta - \alpha\beta^{1/q}}. \tag{16}$$

De plus, r^* est inférieur à r_q.

En effet, l'inégalité $g(q) < g(0)$ s'écrit

$$\frac{q\alpha r}{(1+\alpha r)^q} < \frac{q\beta r}{(1+\beta r)^q}.$$

Soit

$$\frac{\alpha^{1/q}}{1+\alpha r} < \frac{\beta^{1/q}}{1+\beta r}$$

d'où

$$r < r^*.$$

Nous poserons, dans toute la suite

$$\frac{\alpha}{\beta} = \mu$$

de telle sorte que

$$r^* = \frac{1}{\beta}\,\frac{1-\mu^{1/q}}{\mu^{1/q}-\mu}.$$

L'inégalité $r^* < r_q$ s'écrit

$$\frac{1-\mu^{1/q}}{\mu^{1/q}-\mu} < \frac{1}{(q-1)\,\mu}$$

soit

$$y(\mu) = 1 - q\mu^{1-(1/q)} + (q-1)\mu > 0$$

or la dérivée $y'(\mu)$, qui s'écrit

$$y'(\mu) = (q-1)(1-\mu^{-1/q})$$

est négative, puisque μ est inférieure à 1, et y, fonction décroissante de μ s'annulant pour $\mu = 1$, est bien négative.

E. *Détermination de la Valeur Optimale de m*

THÉORÈME 1. *Quel que soit le paramètre positif r, le procédé de directions alternées* (11) *converge si*

$$m < \inf \left\{ \frac{2(1 + \alpha r)^q}{q\alpha r}, \frac{2(1 + \beta r)^q}{q\beta r} \right\}. \tag{17}$$

De plus, la meilleure valeur possible de m, r étant donné, est

$$m^* = \frac{2}{g + G}.$$

En effet, les relations (14) *et* (15) *donnent*

$$\rho(T) \leqslant \sup\{| 1 - mg |, | 1 - mG |\} = \bar{\rho}(m, r) \tag{18}$$

où les quantités g et G ne dépendent que de α, β, *et r*.

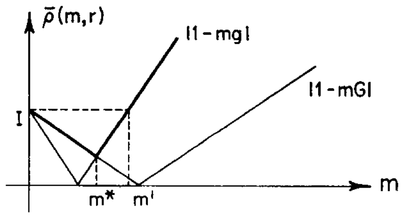

FIG. 1

Le graphique ci-contre indique les variations de $\bar{\rho}(m, r)$ en fonction de m, obtenues à partir de celles de $| 1 - mg |$ et de $| 1 - mG |$. On voit immédiatement, d'une part que la valeur rendant $\bar{\rho}(m, r)$ minimum est m^*, et d'autre part, que si m est inférieur à m', le procédé converge. Or

$$m' = 2/g$$

Mais, d'après le Lemme 2, g est soit $g(0)$, soit $g(q)$, d'où l'inégalité (17).

F. *Détermination de la Valeur Optimale de r*

Du Théorème 1, on déduit le

COROLLAIRE 1. *La valeur optimale de r est celle qui rend le rapport g/G maximum.*

En effet, si l'on donne à m sa valeur optimale m^*, l'inégalité (18) s'écrit

$$\rho(T) \leqslant \frac{1-(g/G)}{1+(g/G)} = \bar{\rho}(r).$$

La valeur optimale de r est celle qui rend $\bar{\rho}(r)$ minimum, donc g/G maximum, puisque g/G est positive et inférieure à 1.

LEMME 4. *La valeur de r inférieure à r^* et appartenant à l'intervalle $[r_p, r_{p+1}]$ où $p \in \{0, 1,..., q-1\}$, rendant $\bar{\rho}(r)$ minimum est* $r = \sup\{r^*, r_{p+1}\}$.

En effet, tout d'abord, on ne peut avoir $r < r^*$ et $r \in [r_p, r_{p+1}]$ si $p = q$, puisque r^* est inférieur à r_q, d'après le Lemme 3. Ensuite, d'après le Lemme 2, le maximum de $g(s)$ est $g(p)$ puisque $r \in [r_p, r_{p+1}]$ et d'après le Lemme 3, $g(q) < g(0)$ puisque $r < r^*$; par conséquent on a

$$g = g(q) \qquad \text{et} \qquad G = g(p).$$

Étudions alors le rapport

$$\frac{g}{G} = \frac{g(q)}{g(p)} = \frac{q\alpha}{p\alpha + (q-p)\beta}\left(\frac{1+\beta r}{1+\alpha r}\right)^{q-p}.$$

C'est une fonction croissante de r, valant l'unité pour une valeur de r égale à

$$r' = \frac{\varphi - 1}{\beta - \alpha\varphi}$$

où

$$\varphi = \left[\frac{p\alpha + (q-p)\beta}{q\alpha}\right]^{1/(q-p)}.$$

Montrons alors que

$$r' > r_{p+1}$$

ce qui s'écrit

$$\frac{\varphi - 1}{\beta - \alpha\varphi} > \frac{1}{p\alpha + (q-p)\beta}. \tag{19}$$

Montrons tout d'abord que $\beta - \alpha\varphi$ est positif, soit que

$$1 > \mu\varphi$$

ce qui s'écrit, après développement

$$y(\mu) = q - p\mu^{q-p} - (q-p)\mu^{q-p-1} > 0.$$

Or la dérivée

$$y'(\mu) = -p(q-p)\mu^{q-p-1} - (q-p)(q-p-1)\mu^{q-p-2}$$

est négative, ce qui montre que y est une fonction décroissante de μ. Or $y(1) = 0$; par conséquent, $y(\mu)$ est positif pour $0 < \mu < 1$ et $\beta - \alpha\varphi$ aussi.

L'inégalité (19) s'écrit alors

$$(\varphi - 1)[p\mu + q - p - 1] > 1 - \mu\varphi$$

soit encore

$$q\mu \leqslant \left[\frac{q + \mu - 1 - p(1-\mu)}{q - p(1-\mu)}\right]^{q-p-1} [q + \mu - 1 - p(1-\mu)].$$

Or, d'une part la quantité du second membre élevée à la puissance $(q - p - 1)$ est une fonction décroissante de p, supérieure à l'unité si p est positif et l'exposant lui-même $(q - p - 1)$ étant une fonction décroissante de p, et d'autre part la quantité $q + p - 1 - p(1 - \mu)$ étant aussi une fonction décroissante de p, il en résulte que le second membre décroît lorsque p croît et que son minimum est donc obtenu pour la plus grande valeur possible de p, soit pour $p = q - 1$; ce minimum vaut $q\mu$, ce qui prouve donc l'inégalité dans le cas où p est positif.

Si p est nul, cette inégalité s'écrit

$$y(\mu) = q - q\mu^{1/q} + \mu - 1 > 0.$$

Or la dérivée

$$y'(\mu) = 1 - \mu^{(1/q)-1}$$

est négative, et y, fonction décroissante de μ prenant la valeur 0 pour $\mu = 1$, est positive pour $0 < \mu < 1$. L'inégalité (19) est donc démontrée dans tous les cas.

On en conclut donc que le rapport $g(q)/g(p)$ est une fonction croissante de r dans tout l'intervalle $[r_p, r_{p+1}]$. Son maximum est donc atteint pour la valeur de r la plus élevée possible, soit pour $r = \sup\{r^*, r_{p+1}\}$.

LEMME 5. *La valeur de r supérieure à r^* et appartenant à l'intervalle $[r_p, r_{p+1}]$ où $p \in \{0, 1, ..., q\}$, rendant $\bar{\rho}(r)$ minimum est $r = \inf\{r^*, r_p\}$.*

En effet, d'après le Lemme 2, le maximum de g est $g(p)$ puisque $r \in [r_p, r_{p+1}]$, et d'après le Lemme 3, on a $g(0) < g(q)$ puisque $r > r^*$; par conséquent, on a

$$g = g(0) \qquad \text{et} \qquad G = g(p).$$

Étudions le rapport

$$\frac{g}{G} = \frac{g(0)}{g(p)}$$

$$= \frac{q\beta}{p\alpha + (q-p)\,\beta}\left(\frac{1+\alpha r}{1+\beta r}\right)^{p}.$$

C'est une fonction décroissante de r, valant l'unité pour une valeur de r égale à

$$r'' = \frac{1-\psi}{\beta\psi - \alpha}$$

où

$$\psi = \left[\frac{p\alpha + (q-p)\,\beta}{q\beta}\right]^{1/p}.$$

Montrons alors que

$$r'' < r_p$$

ce qui s'écrit

$$\frac{1-\psi}{\beta\psi-\alpha} < \frac{1}{(p-1)\,\alpha + (q-p)\,\beta}. \tag{20}$$

Montrons tout d'abord que $\beta\psi - \alpha$ est positif, soit que

$$\psi > \mu$$

ce qui s'écrit, après développement

$$y(\mu) = q - p + p\mu - q\mu^p > 0.$$

Or la dérivée de y

$$y'(\mu) = p[1 - q\mu^{p-1}]$$

est positive pour $\mu < q^{-1/(p-1)} = \mu_0 < 1$, négative pour $\mu > \mu_0$ et nulle pour $\mu = \mu_0$.

La fonction $y(\mu)$ croît donc depuis $q - p$ jusqu'à $y(\mu_0)$, puis décroît jusqu'à la valeur 0 pour $\mu = 1$. Elle est donc bien positive.

L'inégalité (20) s'écrira donc

$$(1-\psi)[(p-1)\mu + q - p] < \psi - \mu$$

soit encore, après développement

$$y(\mu) = q^{1/p}(p\mu + q - p)^{(p-1)/p} - (p-1)\mu - q + p - 1 < 0.$$

Or la dérivée de y

$$y' = (p-1)[q^{1/p}(p\mu + q - p)^{-1/p} - 1]$$

est positive puisque $\mu < 1$ et par conséquent, y fonction croissante de μ s'annulant pour $\mu = 1$ est négative, et (20) est vérifiée.

On peut maintenant énoncer le

THÉORÈME 2. *La valeur optimale de r est r^*, la valeur de $\bar{\rho}(r)$ étant alors égale à*

$$\rho^* = \frac{1 - (g(0)/g(p))}{1 + (g(0)/g(p))} = \frac{1 - (g(q)/g(p))}{1 + (g(q)/g(p))} \tag{21}$$

où p est tel que

$$r_p \leqslant r^* < r_{p+1} . \tag{22}$$

En effet, soit p vérifiant (22). D'après le Lemme 4, la valeur optimale de r prise dans l'intervalle $[r_0 , r_1]$ est $\sup\{r^*, r_1\}$, soit r_1 ; mais r_1 appartient également à l'intervalle $[r_1 , r_2]$ et toujours d'après le Lemme 4, la meilleure valeur possible dans cet intervalle est $\sup[r^*, r_2]$, ce qui montre que r_2 est la meilleure valeur de l'intervalle $[r_0 , r_2]$; on peut ainsi continuer ce raisonnement et montrer que r_p est la meilleure valeur de l'intervalle $[r_0 , r_p]$. Mais r_p appartient à l'intervalle $[r_p , r_{p+1}]$ dans lequel, par hypothèse, se trouve r^*; d'après le Lemme 4, la meilleure valeur possible est $\sup\{r^*, r_{p+1}\} = r^*$, qui est donc la valeur optimale de l'intervalle $[r_0 , r_{p+1}]$.

On peut maintenant montrer, en utilisant le même type de raisonnement à partir du Lemme 5, que r^* est la meilleure valeur de l'intervalle $[r_p , r_{q+1}]$; le Théorème 2 est donc démontré, puisque, pour $r = r^* \in [r_p , r_{p+1}]$, on a $g = g(0) = g(q)$ et $G = g(p)$.

Nous allons maintenant donner une autre forme au Théorème 2, précisant la relation (22). Démontrons le théorème final suivant:

THÉORÈME 3. *Si les matrices A_i sont définies positives, deux à deux commutables, et ont leur spectre contenu dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, et si le rapport $\mu = \alpha/\beta$ est contenu dans l'intervalle $]\mu_{p+1} , \mu_p]$ où μ_p est la racine autre que l'unité de l'équation en μ*

$$q - p + p\mu - (q - p + 1)\mu^{1/q} - (p - 1)\mu^{1+(1/q)} = 0$$

alors les meilleures valeurs possibles de r^*, m et rm sont respectivement

$$r^* = \frac{\beta^{1/q} - \alpha^{1/q}}{\alpha^{1/q}\beta - \alpha\beta^{1/q}}$$

$$m^* = \frac{2(1 - \mu)^q}{\mu^{(q-p-1)/q}[q\mu^{p/q} + p\mu + q - p]\,[1 - \mu^{(q-1)/q}]^{q-1}\,[1 - \mu^{1/q}]}$$

$$m^*r^* = \frac{2[(\beta - \alpha)/(\alpha^{1/q}\beta - \alpha\beta^{1/q})]^q}{q + p\mu^{(q-p)/q} + (q - p)\,\mu^{-(p/q)}} .$$

Le rayon spectral de la matrice de réduction du procédé de directions alternées (11) est alors borné supérieurement par

$$\rho^* = \frac{1 - (q\mu^{p/q}/p\mu + q - p)}{1 + (q\mu^{p/q}/p\mu + q - p)} .$$

De plus, lorsque μ tend vers 0, on a $p = q - 1$, et l'on a les équivalences

$$r^* \sim \frac{1}{\alpha^{1/q}\beta^{1-(1/q)}} , \qquad m^* \sim 2 \qquad \text{et} \qquad \rho^* \sim 1 - 2q\mu^{(q-1)/q}.$$

En effet, recherchons dans quelles conditions l'inégalité $r_p \leqslant r^* < r_{p+1}$ est-elle vérifiée. L'inégalité $r^* > r_p$ s'écrit, après développement:

$$y_p(\mu) = q - p + p\mu - (q - p + 1)\mu^{1/q} - (p - 1)\mu^{1+(1/q)} > 0.$$

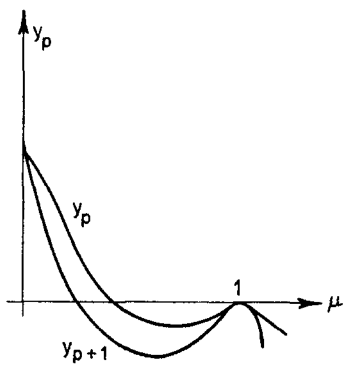

FIG. 2

Les variations de la fonction $y_p(\mu)$ sont indiquées sur le graphique ci-contre. Elles s'obtiennent facilement en étudiant les dérivées première et seconde de y par rapport à μ et par rapport à p.

Une seule valeur μ_p, différente de 1, annule $y_p(\mu)$.

Cette racine μ_p est une fonction décroissante de p et est supérieure à 1 si p est inférieur à $(q + 1)/2$.

L'inégalité $r_p \leqslant r^* < r_{p+1}$ s'écrit donc

$$\mu_{p+1} < \mu \leqslant \mu_p$$

ce qui montre la première partie du Théorème 3.

Si l'on remarque maintenant que μ_p est nul, on en déduit que, lorsque μ tend vers 0, il se trouve dans l'intervalle $]\mu_q , \mu_{q-1}[$ ce qui donne la valeur $q - 1$ à p; ceci démontre la seconde partie du Théorème 3.

Nous allons maintenant étudier quelques cas particuliers.

4. Applications

A. *Méthode de Directions Alternées à Deux Variables*

On a $q = 2$, d'où $\mu_2 = 0 \leqslant \mu < \mu_1 = \infty$. Par conséquent, $p = 1$ quel que soit μ. On en déduit

$$r^* = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}, \qquad m^* = 2 \qquad \text{et} \qquad \rho^* = \left(\frac{1-\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}}\right)^2.$$

On retrouve les résultats de Peaceman–Rachford.

B. *Méthode de Directions Alternées à Trois Variables*

On a $q = 3$, d'où $\mu_3 = 0 \leqslant \mu \leqslant \mu_2 = 1$. Par conséquent, $p = 2$ quel que soit μ. On en déduit:

$$r^* = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2\beta} + \sqrt[3]{\alpha\beta^2}}$$

$$m^* = 2\,\frac{[\sqrt[3]{\beta^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\alpha^2}]^3}{(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta})^2\,(3\,\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2} + 2\alpha\,\sqrt[3]{\beta} + \beta\,\sqrt[3]{\beta})}$$

et

$$\rho^* = \frac{1 - 3\,\sqrt[3]{\mu^2}/(1+2\mu)}{1 + 3\,\sqrt[3]{\mu^2}/(1+2\mu)} = \frac{(1-\sqrt[3]{\mu})^2\,(1+2\,\sqrt[3]{\mu})}{1 + 3\,\sqrt[3]{\mu^2} + 2\mu}.$$

Si μ est très petit, on a

$$r^* \sim \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha\beta^2}}, \qquad m^* \sim 2 \qquad \text{et} \qquad \rho^* \sim 1 - 6\,\sqrt[3]{\mu^2}.$$

Cette méthode est alors équivalente à la méthode de Douglas qui converge donc plus vite que la méthode de Douglas–Rachford.

Cependant, pour des valeurs non faibles de μ, la méthode de directions alternées (11) converge plus vite. A la limite, pour $\alpha = \beta$, on devrait prendre

$$m^* = 9/8 \qquad \text{et} \qquad r^* = 1/2\alpha.$$

C. *Méthode de Directions Alternées à Quatre Directions*

On a $q = 4$, d'où $\mu_4 = 0 < \mu_3 \neq 0.187 < 1 < \mu_2 < \mu_1$.

On a donc deux cas à considérer:

1°. $\mu_3 \neq 0.187 < \mu < 1 < \mu_2$. On obtient, puisque $p = 2$

$$r^* = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3\beta} + \sqrt[4]{\alpha^2\beta^2} + \sqrt[4]{\alpha\beta^3}}$$

$$m^* = \frac{(1-\mu)^4}{\sqrt[4]{\mu}\,(\sqrt{\mu}+1)^2\,(1-\sqrt[4]{\mu^3})^3\,(1-\sqrt[4]{\mu})}$$

et

$$\rho^* = \left[\frac{1+\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}}\right]^2.$$

Le rayon spectral de la matrice de réduction est le même que celui de la matrice de réduction d'un procédé à deux variables de même μ. Comme il y a deux fois plus de matrices $r + A_i$ à inverser, on peut dire que le procédé à quatre variables est, dans ce cas, deux fois moins rapide que le procédé à deux variables.

Les valeurs de m^* sont comprises entre 2.55 pour $\mu = 0.187$ et $\frac{4}{3}^3 \neq 9.5$. La convergence de la méthode de Douglas est alors assez éloignée de celle de cette méthode.

2°. $\mu < \mu_3 \neq 0.187$. On obtient alors, puisque $p = 3$

$$r^* = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3\beta} + \sqrt[4]{\alpha^2\beta^2} + \sqrt[4]{\alpha\beta^3}}$$

$$m^* = \frac{2(1-\mu)^4}{(1+3\mu+4\sqrt[4]{\mu^3})\,(1-\sqrt[4]{\mu^3})^3\,(1-\sqrt[4]{\mu})}$$

et

$$\rho^* = \frac{1-4\sqrt[4]{\mu^3}/(1+3\mu)}{1+4\sqrt[4]{\mu^3}/(1+3\mu)} = \frac{(1-\sqrt[4]{\mu})^2\,(1+2\sqrt[4]{\mu}+3\sqrt[2]{\mu})}{1+4\sqrt[4]{\mu^3}+3\mu}$$

et lorsque μ tend vers 0, on a

$$r^* \sim \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3\beta}}, \qquad m^* \sim 2 \qquad \text{et} \qquad \rho^* \sim 1 - 8\sqrt[4]{\mu^3}.$$

BIBLIOGRAPHY

1. G. BIRKHOFF AND R. S. VARGA. Implicit alternating Direction methods. *Trans. Amer. Math. Soc.* **92** (1959), 13-24.
2. G. BIRKHOFF, R.S. VARGA, AND D.M. YOUNG, JR. "Advances in Computers," Vol. 3. "Alternating Direction Implicit Methods." Academic Press, New York, 1962.

3. E. G. D'JAKONOV. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **143** (1962), 21-24; Traduction dans *Soviet Math. Dokl.* **3** (1962), 320-323; **8**, 408-412.
4. J. DOUGLAS, JR. Alternating direction methods for the three space variable." *Numerische Math.* **4** (1962), 41-63.
5. J. DOUGLAS, JR., R. B. KELLOGG, AND R. S. VARGA. Alternating direction iteration methods for n' space variables. *Math. Computation* **17** (1963), 279.
6. J. DOUGLAS, JR. AND H. M. RACHFORD, JR. On the numerical solution of heat conduction problems in two or three space Variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* **82** (1956), 421-439.
7. R. S. VARGA. "Matrix Iterative Analysis." Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.